**6. Вероятностное пространство, вероятность,**

**случайная величина, функция распределения**

Дадим теперь более полное определение вероятности, добавив некоторые важные понятия к тому, что мы уже знаем о вероятности.

Построение вероятности начинается с задания множества элементарных исходов . В этом множестве мы выбираем различные подмножества, например которые называем случайными событиями. Если множество конечно ( = *N*), то никаких ограничений на выбор событий нет: всякое подмножество в можно объявить случайным событием.

Но если множество бесконечно, например оно является подмножеством на плоскости, то необходимо наложить определенные ограничения на выбор событий. Скажем, геометрическую вероятность определили через площадь, однако хорошо известно, что не всякое множество на плоскости имеет площадь. Второе требование к выбору событий следует из того, что над событиями будут совершаться операции, поэтому если события, то также должны быть событиями.

**Определение.** Пусть задано множество элементарных исходов . Алгеброй событий называется такое множество (элементами которого являются подмножества из Ω), в котором выполнены условия:

если

то есть, само множество – это событие, и вместе с любой парой событий , их сумма, пересечение и дополнение также являются событиями.

Строго говоря, достаточно потребовать, чтобы сумма событий была опять событием, так как для пересечения это следует из соотношений двойственности. Таким образом, алгебра событий замкнута относительно операций с конечными наборами событий. Но во многих ситуациях этого не достаточно, поскольку приходится совершать операции с бесконечными наборами событий (переходить к пределу). Чтобы теория была справедлива и в таких случаях, надо потребовать замкнутости при операциях над счетными множествами событий.

**Определение.** Алгебра называется σ-алгеброй, если для любой последовательности событий их объединение есть событие:

Теперь все готово для того чтобы сформулировать полное определение вероятности .

**Определение.** Для событий (элементов множества ) определена функция *P*, называемая вероятностью (вероятностной мерой), обладающая свойствами:

1) для всякого ,

2) (свойство нормировки) ,

3) если последовательность событий такова, что при , то

(свойство счетной аддитивности).

Набор из трех объектов ( называется вероятностным пространством. Это определение вероятности называется аксиоматикой Колмогорова А.Н.

Сразу отметим очевидные следствия из определения: ; пустое множество является событием (), причем так как .

**Теорема 6.1.** Следующее свойство (непрерывность вероятности) является эквивалентным аксиоме 3): пусть имеет место аддитивность вероятности для конечного набора событий и для бесконечной последовательности событий такой, что и , при *n* .

**Доказательство.** Предположим, имеет место аксиома 3). Из последовательности вложенных событий составим последовательность *B*, (*k = 1,2,…*); она состоит из попарно несовместных событий, причем . Согласно аксиоме 3) тогда , следовательно, ряд здесь сходится, а значит,

при *n* ,

Теперь наоборот, пусть имеет место сформулированное свойство и - некоторая последовательность несовместных событий, тогда

и переходя к пределу, получаем

=

что и требовалось.

Аддитивность вероятности для бесконечных последовательностей событий называется σ-аддитивностью, в отличие от обычной аддитивности, которой мы ранее пользовались, рассматривая только конечные наборы событий. Следующий пример показывает необходимость именно такого определения вероятности, иначе могут возникать проблемы при решении даже простых задач.

**Пример 6.1.** На единичный отрезок случайным образом бросается точка и независимо от нее таким же образом бросается вторая. Найти вероятности событий:

,

.

Вероятностная мера здесь соответствует геометрическому определению вероятности: вероятность попадания случайной точки в некоторый отрезок равна длине этого отрезка. Поэтому вероятности первых двух событий легко находятся на основе независимости событий , :

,

Но вычислить так просто не удается: как видно из рисунка 6.1 ( по горизонтальной оси изображает первое число, -по вертикали второе, единичный квадрат есть ), множество не сводится к прямоугольникам вида , для которых вероятности считаются как для *A* и *B*. Однако множество можно с любой степенью точности представить в виде суммы таких непересекающихся прямоугольников, аксиома 3) тогда гарантирует, что в пределе, когда сумма прямоугольников стремится к множеству , сумма их вероятностей стремится к .

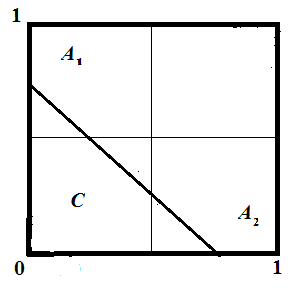
**

Рисунок 6.1. Вероятностное пространство Примера 6.1

Изложенные понятия позволяют нам решать первую часть задач: зная вероятности одних событий, мы можем правильным образом вычислять вероятности других, интересующих нас событий. Но как правило, случайные события интересуют нас не сами по себе (или не только), а в связи с тем, что каждому событию присоединен некоторый числовой результат (физическая величина – вес, размер, заряд …, или финансовый результат – выигрыш, прибыль, убыток и т.д.). Поскольку событие является случайным – может наступить или не наступить, то и числовой результат становится случайным и нужны математические правила для действий с такими случайными наблюдениями.

Так появляется понятие случайной величины, к которому мы и переходим в следующих двух параграфах. Здесь только сформулируем определение случайной величины в общем виде.

**Определение.** Пусть ( – вероятностное пространство и на множестве задана числовая функция ( – множество вещественных чисел). Функция называется случайной величиной, если для любого множество , то есть это множество является событием.

Иначе говоря, случайной величиной мы называем такую функцию от элементарного исхода, для которой существуют вероятности . Этого определения достаточно чтобы задать вероятности любых событий вида ,

, и т.д., действительно,

,

.

Далее для краткости такие множества будем записывать в виде , и т.д..

Свойства случайных событий (σ-алгебр событий) и вероятности как функции множеств показывают, что для задания конкретной случайной величины достаточно задать вероятности событий вида , все прочие вероятности тогда можно будет найти с помощью соответствующих операций. Но при заданной вероятностной мере *P* множество вероятностей , зависящих от переменной , определяет некоторую функцию аргумента .

**Определение**. Функция вещественной переменной

называется функцией распределения случайной величины .

**Теорема 6.2.** Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Для справедливо равенство

из которого также следует, что неубывающая функция,

**Доказательство.** Если , то событие можно представить как сумму двух несовместных событий, , откуда и следует первое утверждение.

Рассмотрим последовательность событий , удовлетворяющую условиям Теоремы 6.1.: {} – последовательность вложенных событий с предельным множеством , следовательно

,

то есть .

Для доказательства свойства 3) воспользуемся аксиомой счетной аддитивности и доказанным равенством 1). Определим последовательность несовместных событий

; поскольку , то

,

следовательно,